E.N.S. Ulm et Sèvres 1985

GROUPE A

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. — *Les diverses parties de l'épreuve sont indépendantes.*

I

Décrire sommairement l'outil de calcul utilisé. S'il s'agit d'une calculatrice de poche, on précisera en particulier les points suivants :

Marque — modèle — nombre de chiffres affichés — nombre de registres de mémoire — caractère programmable ou non — imprimante — liste des principales fonctions et opérations fournies.

II

Le but de cet exercice est le calcul *ex nihilo* d'une table des *logarithmes népériens* des nombres entiers de 1 à 10.

1° Montrer qu'on peut se limiter au calcul des logarithmes des nombres 2, 3, 5, 7.

2° Donner la liste des nombres entiers compris entre 1 et 100, n'admettant aucun diviseur premier distinct de 2, 3, 5 et 7.

3° Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs. Montrer que l'on peut calculer $\log(a/b)$ comme le produit de $2(a-b)/(a+b)$ par une série de puissances $L(t)$ en $t = (a-b)^2/(a+b)^2$. Donner l'expression de $L(t)$ et étudier sa convergence. Déterminer les restrictions éventuelles de la méthode.

4° Par utilisation des résultats de 2° et 3°, calculer le logarithme de 4 nombres bien choisis de la forme a/b, où a et b n'admettent pas de diviseur premier distinct de 2, 3, 5 ou 7. On fera le calcul avec 13 décimales, en donnant le détail des opérations, et en indiquant comment dépasser la capacité de la machine.

5° Par la résolution d'un système linéaire de 4 équations linéaires à 4 inconnues, déduire de 4° la valeur des logarithmes des nombres 2, 3, 5 et 7.

6° Terminer le calcul des logarithmes des nombres entiers de 1 à 10. On donnera le résultat final sous forme d'une table avec 12 décimales. A titre de comparaison, on pourra donner la table obtenue par utilisation directe de la calculatrice — ou la lecture d'une table imprimée.

III

1° Indiquer une méthode générale pour donner la liste de tous les diviseurs d'un nombre entier n, donné par sa décomposition en facteurs premiers. Quel est le nombre de ces diviseurs (y compris 1 et n)?

2° En application de ce qui précède, donner la liste explicite des diviseurs du nombre 675. En déduire la liste $Z = \{a_1, \ldots, a_{12}\}$, rangée par ordre croissant, des nombres entiers n satisfaisant aux conditions suivantes :

$384 \leqslant n < 768$;

n est de la forme $2^a.b$ où $a \geqslant 0$ est entier, et b divise 675.

3° On rappelle les symboles courants utilisés pour désigner les douze notes de musique de la gamme :

do do♯ ré ré♯ mi fa fa♯ sol sol♯ la la♯ si

En principe, une note de musique correspond à une fréquence sonore bien déterminée; pour décrire une gamme, on se donne une suite de 12 fréquences (mesurées en Hertz Hz) $f_1 < f_2 < \ldots < f_{11} < f_{12}$ avec $f_{12} < 2f_1$, et l'on attribue la fréquence f_1 à do, la fréquence f_2 à do♯, etc. Les notes « non altérées » sont do, ré, mi, fa, sol, la, si correspondant aux fréquences $f_1, f_3, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}$. On pose $f_{13} = 2f_1$ (correspondant au do de l'octave supérieure).

La *gamme de Zarlino* s'obtient en choisissant une fréquence f et en posant $f_i = fa_i$, où les a_i sont comme en 2°; la *gamme de Pythagore* s'obtient en choisissant la fréquence f_6 correspondant à la note fa, et en imposant aux rapports f_i/f_6 d'être des nombres rationnels de la forme $2^a.b$ avec a entier rationnel et b divisant 3^{11}. (Ceci détermine la gamme de façon unique.)

Pour chacune de ces deux gammes, on donnera sous forme de tableaux les nombres suivants exprimés comme fractions :

— les rapports f_i/f_1 pour $1 \leqslant i \leqslant 12$;

— les rapports f_{i+1}/f_i pour $1 \leqslant i \leqslant 12$ (correspondant aux « demi-tons »);

— les rapports $f_3/f_1, f_5/f_3, f_6/f_5, f_8/f_6, f_{10}/f_8, f_{12}/f_{10}, f_{13}/f_{12}$.

Quelles remarques vous suggèrent ces tableaux?

4° Si deux notes N_1 et N_2 correspondent respectivement aux fréquences f_1 et f_2, on mesure l'*intervalle musical* entre N_1 et N_2 par le nombre :

$$I(N_1, N_2) = \log_2(f_2/f_1)$$

(le logarithme est pris en base 2); l'unité d'intervalle est donc l'octave, ou intervalle séparant deux fréquences f et $2f$.

La *gamme tempérée de Rameau* se compose de douze notes séparées par des intervalles égaux.

Donner sous forme de tableau les intervalles $Z_1, \ldots, Z_{12}$ entre le do et les notes successives do, do♯, ... dans la gamme de Zarlino, ainsi que les nombres $P_1, \ldots, P_{12}$ analogues pour la gamme de Pythagore, et les nombre $R_1, \ldots, R_{12}$ pour la gamme de Rameau. On donnera aussi les écarts $Z_k - R_k$ et $P_k - R_k$, qui mesurent le « défaut de tempérament ». Tous ces nombres seront exprimés sous forme décimale à 10^{-4} près.

5° Sur le tableau précédent, vérifier que, à la précision donnée, tous les écarts $Z_k - R_k$ et $P_k - R_k$ sont des multiples entiers de celui d'entre eux qui a la plus faible valeur absolue. Déterminer deux nombres u et v tels que l'on puisse écrire des relations :

$$P_k - R_k = b_k u, \qquad Z_k - R_k = c_k u + d_k v,$$

pour $k = 1, \ldots, 12$, où b_k, c_k et d_k sont des entiers que l'on déterminera explicitement. Donner la valeur numérique, à 10^{-10} près, de u et v et expliquer la remarque faite au début de ce numéro.

6° On complète la gamme en insérant 5 nouvelles notes :

réb entre do et do♯
mib entre ré et ré♯
solb entre fa et fa♯
lab entre sol et sol♯
sib entre la et la♯.

Dans la gamme de Pythagore étendue, toute les fréquences sont de la forme $2^a.3^b.f_1$ avec a entier rationnel, et $-6 \leqslant b \leqslant 10$, et f_1 est la fréquence de do.

Donner sous forme de fractions les rapports f/f_1 pour ces 5 nouvelles notes, ainsi que les intervalles $\log_2(f/f_1)$ sous forme décimale, à 10^{-4} près.

7° La *gamme de Hölder* se compose des 17 notes do, réb, do♯, ré, ..., et l'intervalle entre deux notes est toujours un multiple entier de 1/53 d'octave; les notes sont choisies de manière à être le plus proches possible des notes de la gamme de Pythagore étendue. On donnera le tableau des intervalles séparant deux notes successives dans cette gamme, en fonction de l'unité $c = 1/53$ octave (appelée « comma de Hölder »).

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On détermine deux suites de nombres réels a_k et b_k par les règles suivantes :

— on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$;

— si l'on a $a_k < b_k$, on pose $a_{k+1} = a_k$ et l'on prend b_{k+1} sous la forme $b_k - f_k a_k$, où l'entier f_k est déterminé de telle sorte que l'on ait $0 < b_{k+1} < a_k$;

— si l'on a $a_k > b_k$, on pose $b_{k+1} = b_k$ et l'on prend a_{k+1} sous la forme $a_k - f_k b_k$, où l'entier f_k est déterminé de telle sorte que l'on ait $0 < a_{k+1} < b_k$.

Ce procédé a été introduit par les mathématiciens grecs sous le nom d' « anthyphairèse ».

1° Montrer que le procédé est parfaitement défini si le rapport a/b est irrationnel, et indiquer les modifications à apporter si a/b est rationnel.

2° Déterminer a_k et b_k dans le cas particulier $a = 1$, $b = 2^{1/2}$.

3° Démontrer qu'il existe une suite de matrices $M_k = \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ r_k & s_k \end{pmatrix}$ à coefficients entiers telles que l'on ait $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour tout entier $k \geqslant 0$. On donnera une formule de récurrence pour la matrice M_k, en distinguant le cas $a < b$ du cas $a > b$. En déduire la valeur du déterminant de M_k.

4° On suppose que l'on a $a > b$ et que a/b est irrationnel. En exploitant le fait que l'on a $a_k > 0$ et $b_k > 0$, déduire de la question 3° l'existence de deux suites de nombres rationnels p'_k/q'_k et p''_k/q''_k tels que l'on ait les relations :

$$\frac{p'_1}{q'_1} < \frac{p'_2}{q'_2} < \ldots < \frac{a}{b} < \ldots < \frac{p''_2}{q''_2} < \frac{p''_1}{q''_1}$$

$$|p'_k/q'_k - p''_k/q''_k| = 1/q'_k q''_k \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant 1$$

5° On suppose que l'on a $a = \log 3$ et $b = \log 2$. Déterminer les nombres p'_k/q'_k et p''_k/q''_k pour $1 \leqslant k \leqslant 4$. Les résultats obtenus vous suggèrent-ils un lien avec les questions traitées en III?